



ScienceDirect  
Disponibile en [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)



Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 13 (2016) 265–280

[www.elsevier.es/RIAI](http://www.elsevier.es/RIAI)

## Control fraccionario: fundamentos y guía de uso

Blas M. Vinagre<sup>a,\*</sup>, Vicente Feliu-Batlle<sup>b</sup>, Inés Tejado<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Escuela de Ingenierías Industriales, Universidad de Extremadura, Avenida de Elvas, s/n, 06006 Badajoz, España.

<sup>b</sup>Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Castilla – La Mancha, Avenida Camilo José Cela, s/n, 13071 Ciudad Real, España.

### Resumen

El objetivo del presente tutorial de control fraccionario es presentar los fundamentos de esta disciplina y las principales herramientas computacionales disponibles para su uso y aplicación por parte del ingeniero de control. El enfoque escogido pretende hacer accesible desde el primer momento su ubicación en el control clásico y las bases para entender cómo cualquier estrategia de control que haga uso de los operadores derivada y/o integral (es decir, casi todas) puede generalizarse al considerar la posibilidad de utilizar dichos operadores con un orden no necesariamente entero. Los casos de estudio considerados (el doble integrador y el servomecanismo de posición) han sido elegidos no para exponer las bondades del control fraccionario, sino para mostrar la amplitud de posibilidades que proporciona su utilización incluso considerando sistemas extraordinariamente comunes en la literatura de control.

**Palabras Clave:**

Control fraccionario, Sistemas fraccionarios, Control robusto.

### 1. El integrador fraccionario en los albores del control clásico. A modo de introducción

... un descubrimiento es prematuro si sus implicaciones no pueden conectarse, por una serie de escalones lógicos y simples, con el conocimiento canónico o aceptado por todos.

*Gunther S Stent*

*Lo único y lo prematuro en el descubrimiento científico.*

Es bien conocido que el extraordinario desarrollo que la teoría clásica de control experimentó durante el segundo tercio del siglo XX fue en gran parte debido a la confluencia de las técnicas en el dominio de la frecuencia desarrolladas en electrónica de comunicaciones y la teoría de servomecanismos. Los trabajos seminales de Black, Nyquist, Bode o Hazen, entre otros (Bennett, 1993), no solo proporcionaron herramientas para el análisis de sistemas y el diseño de controladores, sino que establecieron la terminología (márgenes de ganancia y de fase, coeficiente de amortiguamiento, pulsación natural no amortiguada, etc.) y el sistema de referencia (el servomecanismo de posición)

que siguen vigentes en la actualidad. Este sistema de referencia viene descrito por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\delta\omega_n)}, \quad (1)$$

siendo  $\delta$  el coeficiente de amortiguamiento y  $\omega_n$  la pulsación natural no amortiguada. En ausencia de fricción ( $\delta = 0$ ) el sistema se comporta como un doble integrador

$$G_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2}. \quad (2)$$

No es tan conocido, sin embargo, el hecho de que por esas mismas fechas destacados investigadores daban pasos hacia la adopción de un sistema de referencia alternativo. En (Bode, 1940) H. Bode establecía las relaciones magnitud/fase en la respuesta en frecuencia, y en (Bode, 1945), basándose en esas relaciones, presentaba una elegante solución al problema de diseño robusto planteado: obtener un amplificador realimentado que en lazo cerrado fuera invariante a variaciones en la ganancia del amplificador. A esta solución la denominó *característica de corte ideal*, y era ideal en el sentido de que su diagrama de Nyquist es una línea recta desde el origen correspondiente a un margen de fase invariante a los cambios en la ganancia. Es decir, era de la forma

$$G_k(s) = \left(\frac{\omega_g}{s}\right)^k, \quad (3)$$

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [bvinagre@unex.es](mailto:bvinagre@unex.es) (Blas M. Vinagre), [vicente.feliu@uclm.es](mailto:vicente.feliu@uclm.es) (Vicente Feliu-Batlle), [itejbal@unex.es](mailto:itejbal@unex.es) (Inés Tejado)

donde  $\omega_g$  es la frecuencia de cruce de ganancia y el margen de fase constante es

$$MF = \pi - k \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

Aunque las nociones introducidas por Bode han llegado a ser claves en la teoría de control automático, ésta de la *función ideal* no ha sido tan discutida en la literatura especializada. No obstante, ya en 1958, A. Tustin publicó un largo artículo (más bien una monografía) sobre “El diseño de sistemas para el control automático de la posición de objetos grandes y pesados” (Tustin et al., 1958). En la primera sección de este trabajo, que venía a ser una nueva contribución de A. Tustin al control de servomecanismos, se estudian los requerimientos en conflicto para el sistema de control de posición expresados como restricciones en el diagrama de magnitud de la respuesta en frecuencia para el lazo de control. En las secciones 1.5 y 1.6, habla de que las relaciones deseables en estos diagramas corresponden a funciones de frecuencia de la forma

$$Y(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^k}, \quad (5)$$

puesto que en forma polar corresponden a líneas rectas desde el origen (igual que en Bode) con pendiente  $k$  y formando un ángulo de  $k\pi/2$ , coincidiendo con los ejes si  $k$  es un *número entero*. Posteriormente habla de cómo obtener aproximaciones a esta característica partiendo del servomecanismo “ideal” con función de frecuencia

$$Y(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2}. \quad (6)$$

Es obvio, aunque no para Tustin en aquel momento, que una forma simple de obtener las características deseadas a partir de este servomecanismo ideal, es introducir un controlador con función de transferencia

$$D(s) = s^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (7)$$

obteniendo así un sistema en lazo cerrado como el de la Figura 1.

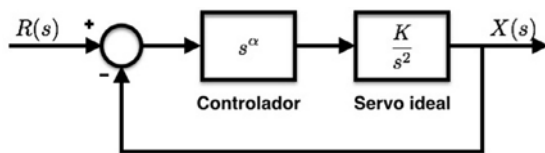


Figura 1: Lazo ideal a partir del servo ideal.

Fue el investigador japonés Shunji Manabe de la empresa Mitsubishi Electric quien primero recogió las ideas de Bode y Tustin y habló explícitamente de la *integral no entera* y sus aplicaciones en sistemas de control (Manabe, 1961). En la introducción de su artículo se puede leer lo siguiente:

“Entre varios tipos de funciones de transferencia en lazo abierto que teóricamente satisfacen las especificaciones

dadas, solo una de ellas satisface el requisito práctico de que el sistema mantenga suficiente estabilidad y precisión incluso bajo los fuertes efectos de la saturación inherente a los equipos de control en el lazo.

De acuerdo con la teoría de la función descriptiva, la saturación se considera como un componente de ganancia variable, en el que la ganancia depende de la amplitud de la entrada. Para que el sistema sea estable incluso con variaciones de ganancia, el margen de fase del elemento lineal, además del elemento no lineal de saturación, debe ser suficientemente grande no solo a la frecuencia de cruce lineal sino también para un rango de frecuencias relativamente amplio.

Generalmente un buen diseño requiere que el margen de fase se mantenga aproximadamente constante para este rango de frecuencias. Como resultado, su función de transferencia en lazo abierto se aproximará a la de la integral no entera  $1/s^k$ , donde  $k$  es un valor entre 1 y 2.”

Esto es, vuelven a repetirse los requisitos y argumentos de Bode y Tustin, pero dando nombre a esa *función de transferencia ideal en lazo abierto*: es un *integrador fraccionario* de orden entre 1 y 2.

En el mismo año en que se publicó la versión inglesa del artículo de Manabe, en la Universidad de Kansas G. E. Carlson y C. A. Halijak publicaron un informe sobre el derivador y el integrador de orden 1/2 y su posible uso en servomecanismos (Carlson y Halijak, 1961), informe que se vería continuado en una tesis de master en 1966 sobre el servo tipo Strait (Opdycke, 1967).

Aunque la *Teoría Cuantitativa de Control* de Horowitz (Horowitz, 1963; Horowitz y Sidi, 1972) recoge esta idea de robustez introducida por Bode, no se habla de control de orden no entero (fraccionario) hasta el surgimiento a principios de los 80 del denominado *Control Robusto de Orden No Entero* (CRONE) por Alain Oustaloup y su equipo (Oustaloup, 1991). En el trabajo continuado del equipo CRONE se han establecido hasta el momento tres generaciones de controladores, pero su base fundamental es el conformado del lazo teniendo al integrador fraccionario como referencia.

En las Figuras 2 y 3 se muestran las respuestas al escalón unitario del sistema de la Figura 1 para distintos valores de los parámetros  $\alpha$  y  $K$ . En ellas se puede ver cómo la ganancia solo influye en la rapidez de la respuesta, mientras que la sobreoscilación solo depende de  $\alpha$ , es decir, del orden del integrador fraccionario resultante.

Es pertinente mencionar que en el capítulo 12 de (Aström y Murray, 2008), dedicado a la robustez, se estudia esta *función ideal*, y se dice que los diseñadores de amplificadores operacionales están haciendo grandes esfuerzos por obtener aproximaciones válidas sobre un amplio rango de frecuencias.

### 1.1. Estructura del artículo

Después de esta introducción, lo que resta del artículo está organizado como sigue. En la sección 2 se introducen los operadores fraccionarios (derivada e integral) y se

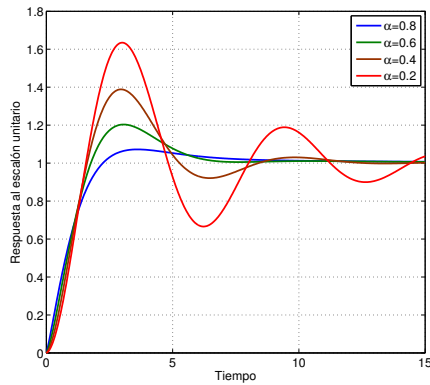


Figura 2: Respuesta al escalón del lazo ideal del servo con  $K = 1$  y diferentes valores de  $\alpha$ .

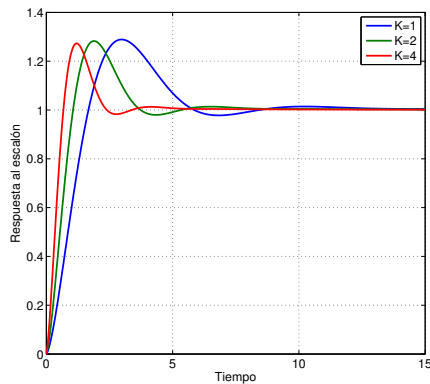


Figura 3: Respuesta al escalón del lazo ideal del servo con  $\alpha = 0,5$  y diferentes valores de  $K$ .

describen algunos de los métodos concebidos para aproximarlos y poder utilizarlos tanto en simulaciones como en aplicaciones prácticas. La sección 3 está dedicada a los sistemas fraccionarios, sus modelos, características dinámicas y estabilidad. En la sección 4 se muestran ejemplos de diseño de controladores fraccionarios tomando el doble integrador y el servomecanismo de posición como casos de estudio. En la sección 5 se describen las principales herramientas computacionales para el análisis y diseño de sistemas y reguladores fraccionarios desde el punto de vista del usuario. Finalmente, en la sección 6 se hace un breve resumen de lo expuesto y se apuntan algunas perspectivas futuras en control fraccionario a modo de conclusión. En el apéndice se da una breve noticia bibliométrica sobre la presencia del control fraccionario en las principales bases de datos.

A lo largo de todo el artículo, concebido como un tutorial o guía de uso, se reducen al mínimo las sutilezas matemáticas dejando lo absolutamente imprescindible en un trabajo de tipo tutorial y de motivación para su estudio. Por el mismo motivo, se ha limitado el número de referen-

cias citando solo aquellas que se han estimado necesarias y suficientes por la calidad de los resultados obtenidos o la cantidad de información aportada. Por otra parte, el enfoque quiere ser distinto y complementario al de (Vinagre y Monje, 2006).

## 2. Operadores fraccionarios

### 2.1. Definiciones

Desde los últimos cursos de bachillerato los estudiantes conocen los operadores diferenciales  $d/dx$ ,  $d^2/dx^2$ , etc., pero probablemente pocos se preguntan si es necesario que el orden de diferenciación sea un entero. ¿Por qué no un número racional, fraccionario, irracional o incluso complejo? Ya en el comienzo del cálculo diferencial e integral, en una carta a L'Hôpital en 1695, el propio Leibniz planteó la cuestión: «¿Puede generalizarse el significado de las derivadas de orden entero a derivadas de órdenes no enteros?» L'Hôpital sintió curiosidad ante la pregunta y respondió con otra: «¿Qué ocurriría si el orden fuera  $1/2$ ?» Leibniz, en una carta del 30 de Septiembre de 1695, respondió: «Esto conduciría a una paradoja, de la cual se obtendrán consecuencias útiles algún día». La cuestión planteada por Leibniz ha sido un asunto tratado durante más de 300 años, y ahora se conoce como cálculo fraccionario, una generalización de la derivada y la integral ordinarias para órdenes arbitrarios (no enteros).

Asumiendo por el momento condiciones iniciales nulas, si se define  $F(s)$  como la transformada de Laplace de la función  $f(t)$ ,  $F(s) \equiv \mathcal{L}[f(t)]$ , en la ecuación

$$G(s) = \frac{1}{s^n} F(s), \quad (8)$$

se puede reconocer el equivalente en el dominio de Laplace de la integral  $n$  veces de la función  $f(t)$ . Si se considera una primitiva de la función  $f(t)$ ,  $\mathcal{D}^{-1}f(t)$ , entonces

$$\mathcal{D}^{-1}f(t) = \int_0^t f(x)dx. \quad (9)$$

Ahora, aplicando el operador nuevamente se obtiene

$$\mathcal{D}^{-2}f(t) = \int_0^t \int_0^x f(y)dydx. \quad (10)$$

La ecuación (10) puede considerarse como una doble integral, y teniendo en cuenta el plano  $x$ - $y$  sobre el que se está integrando, es posible cambiar el orden de las integraciones haciendo los cambios adecuados en los límites. Se obtiene así

$$\mathcal{D}^{-2}f(t) = \int_0^t \int_y^t f(y)xdydx. \quad (11)$$

Como  $f(y)$  es una constante con respecto a  $x$ , la integral interna es simplemente  $(t-y)f(y)$ , y se tiene que

$$\mathcal{D}^{-2}f(t) = \int_0^t (t-y)f(y)dy. \quad (12)$$

De manera similar, se puede obtener que

$$\mathcal{D}^{-3}f(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (t-y)^2 f(y) dy, \quad (13)$$

y así sucesivamente, obteniendo finalmente la fórmula

$$\mathcal{D}^{-n}f(t) = \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{n \text{ veces}} f(y) dy \cdots dy = \int_0^t \frac{f(y)(t-y)^{n-1}}{(n-1)!} dy. \quad (14)$$

La última ecuación, que muestra que una integral repetida puede expresarse como una integral ponderada con una función de ponderación muy simple, es conocida como la *fórmula de Cauchy* para la integral repetida. Generalizando (14) para el caso de  $n \in \mathbb{R}^+$ , y haciendo uso de la función *Gamma* (generalización del factorial para números no enteros), se obtiene

$$\mathcal{D}^{-n}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t f(y)(t-y)^{n-1} dy, \quad (15)$$

que corresponde a la conocida como *definición de Riemann-Liouville* para la integral fraccionaria de orden  $n \in \mathbb{R}^+$  (Podlubny, 1999a; Miller y Ross, 1993).

Es posible obtener el mismo resultado siguiendo un camino diferente. Haciendo la transformada inversa de Laplace, la función correspondiente a  $1/s^n$ ,  $n \in \mathbb{R}^+$  es

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^n} \right] = \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}. \quad (16)$$

Así, siendo (8) el producto de las funciones  $1/s^n$  y  $F(s)$  en el dominio de Laplace, corresponde a la convolución en el dominio del tiempo

$$\mathcal{D}^{-n}f(t) = \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} * f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t f(y)(t-y)^{n-1} dy. \quad (17)$$

Si ahora se consideran las derivadas, el operador  $s^n$ ,  $n \in \mathbb{R}^+$  en el dominio de Laplace requiere un operador de la forma  $d^n/dt^n$  en el dominio del tiempo. De acuerdo con la definición común de la derivada como el límite de una diferencia, la derivada primera de la función  $f(t)$ ,  $\mathcal{D}^1 f(t)$ , se define como

$$\mathcal{D}^1 f(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}, \quad (18)$$

Similarmente, se puede definir la derivada segunda como

$$\mathcal{D}^2 f(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} [f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)] \quad (19)$$

e iterando  $n$  veces, es posible obtener

$$\mathcal{D}^n f(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t-kh), \quad (20)$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} \quad (21)$$

es la notación usual para los coeficientes binomiales. Para  $n \in \mathbb{R}^+$  la ecuación (20) es conocida como *definición de Grünwald-Letnikov* para la derivada fraccionaria de orden  $n$  (Podlubny, 1999a; Miller y Ross, 1993).

Es posible preguntarse si (15) y (20) pueden utilizarse para cualquier  $n \in \mathbb{R}$ , con objeto de obtener definiciones unificadas para los operadores derivada e integral generalizados. De hecho así es, pero teniendo en cuenta ciertas sutilezas matemáticas concernientes tanto a las funciones afectadas como a los límites de las propias operaciones. Las definiciones anteriores no son las únicas establecidas para los operadores fraccionarios, pero sí las más utilizadas en aplicaciones prácticas junto con la conocida como *definición de Caputo*, que tiene la ventaja de considerar condiciones iniciales que vienen dadas por derivadas de orden entero (ver (Podlubny, 1999a; Miller y Ross, 1993) para más detalles). El lector interesado también puede encontrar información sobre el desarrollo histórico del cálculo fraccionario en (Oldham y Spanier, 2006; Miller y Ross, 1993; Dugowson, 1994).

## 2.2. Aproximaciones

Como se puede deducir de lo expuesto en las secciones anteriores, los operadores fraccionarios  $s^{\pm\alpha}$  implican una memoria infinita, es decir, es necesario un infinito número de términos para aproximar su comportamiento dinámico, ya sea en el dominio del tiempo o en el de la frecuencia. Sin embargo, las aplicaciones prácticas requieren realizar dichos operadores con un algoritmo de duración finita, lo que implica que, comparadas estas realizaciones con el original, son, desde el punto de vista de la frecuencia, válidas solamente en un determinado rango de frecuencias. Si se considera el caso de órdenes reales, en la literatura se pueden encontrar muchos métodos para realizar los operadores derivada e integral fraccionaria, pero todos ellos se pueden incluir en alguna de las siguientes categorías:

- Realizaciones continuas: aproximación de  $s^{\pm\alpha}$  por una combinación finita de ceros y polos;
- Realizaciones discretas:
  - según el tipo de filtro digital obtenido: 1) filtros FIR (realización directa de (20) o expansión en serie de potencias de las funciones del tipo  $w^\alpha(z^{-1})$  correspondientes a las distintas aproximaciones de la derivada); 2) filtros IIR (expansión en fracciones continuadas de las funciones  $w^\alpha(z^{-1})$ , u otras que den como resultado funciones racionales de  $z$ );
  - según el operador aproximado: 1) discretización de realizaciones continuas (discretización del operador  $s$  por alguno de los métodos tradicionales); 2) discretización directa (aplicación de un esquema numérico para la solución de la ecuación diferencial fraccionaria, o expansión de las funciones  $w^\alpha(z^{-1})$ ).

Todas ellas responden a la forma

$$s^\alpha \simeq \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i} \quad (22)$$

para las aproximaciones continuas, o bien

$$s^\alpha \simeq \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i} \quad (23)$$

para las aproximaciones discretas.

En esencia, desde el punto de vista de la ingeniería de control, se trata de reemplazar el operador de orden fraccionario por una función de transferencia continua o discreta cuyas características dinámicas sean suficientemente aproximadas. Hay muchas maneras de obtener tales aproximaciones pero, desafortunadamente, no es posible decir cuál es la mejor porque, entre las buenas, los méritos relativos de cada una dependen de factores tales como: el orden fraccionario, la banda de frecuencias de interés, el comportamiento a bajas frecuencias (aproximación al estado estacionario), si el interés está en el dominio del tiempo o en el de la frecuencia, o cómo de complejo pueda ser el algoritmo de control (orden  $n$  de las aproximaciones).

Un enfoque distinto y más conveniente desde el punto de vista del control clásico, es utilizar técnicas de identificación, fundamentalmente en el dominio de la frecuencia, para obtener sistemas de orden entero cuya respuesta se ajuste óptimamente a la del controlador fraccionario diseñado.

El lector interesado puede consultar el capítulo 12 de (Monje et al., 2010) y las referencias allí incluídas para obtener más detalle de todos estos métodos y su aplicación.

### 3. Sistemas Fraccionarios

En esta sección se extienden las técnicas de modelado habituales para sistemas dinámicos de orden entero al caso de sistemas de orden fraccionario. Supóngase que un sistema dinámico viene descrito por la siguiente ecuación diferencial de orden fraccionario (o no entero), que es una generalización de la ecuación diferencial ordinaria

$$a_n \mathcal{D}^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} \mathcal{D}^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 \mathcal{D}^{\alpha_0} y(t) = b_m \mathcal{D}^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} \mathcal{D}^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 \mathcal{D}^{\beta_0} u(t). \quad (24)$$

$\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$

En el caso de que en esta ecuación todos los órdenes de derivación fueran múltiplos enteros de un orden base  $\alpha$ , es decir,  $\alpha_k, \beta_k = k\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , se dice que el sistema es de *orden conmensurable* y (24) se convierte en

$$\sum_{k=0}^n a_k \mathcal{D}^{k\alpha} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k \mathcal{D}^{k\alpha} u(t). \quad (25)$$

Si además se verifica que  $\alpha = 1/q$ ,  $q \in \mathbb{N}$  en (25), se dice que el sistema es de *orden racional*.

Por tanto, los sistemas lineales invariantes con el tiempo (LTI) pueden clasificarse en:

$$\text{LTI} \begin{cases} \text{No enteros} \\ \text{Enteros} \end{cases} \begin{cases} \text{Conmensurables} \\ \text{No conmensurables} \end{cases} \begin{cases} \text{Racionales} \\ \text{Irracionales} \end{cases}$$

#### 3.1. Representación mediante funciones de transferencia

Si se aplica la transformación de Laplace a (24) con condiciones iniciales nulas, se obtiene la representación entrada-salida de un sistema de orden fraccionario, que viene dada por una función de transferencia de la forma

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (26)$$

que, en el caso de ser un sistema de orden conmensurable, adquiere la forma

$$G(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (s^\alpha)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (s^\alpha)^k}, \quad (27)$$

que es una función racional en la variable  $\lambda = s^\alpha$ :

$$G(\lambda) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k \lambda^k}{\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k}. \quad (28)$$

#### 3.2. Representación mediante variables de estado

Considérese un sistema LTI multivariable de orden fraccionario. Su representación mediante variables de estado será

$$\mathcal{D}^\alpha \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (29)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u}, \quad (30)$$

donde  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  es el vector columna de entrada,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es el vector columna de estado,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$  es el vector columna de salida,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de estado,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la matriz de entrada,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  es la matriz de salida y  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$  es la matriz de transmisión directa. La notación anterior establece que la derivada de orden fraccionario  $\mathcal{D}^{\alpha_i}$  se aplica únicamente al elemento  $x_i$  del estado  $\mathbf{x}$  en (29). La ecuación (29) recibe el nombre de *ecuación de estado de orden fraccionario* y la (30) de *ecuación de salida*.

Este modelo de orden fraccionario puede simplificarse en el caso particular de que  $\alpha_i \equiv \alpha$ ,  $1 \leq i \leq n$ , en cuyo caso la ecuación (29) se convierte en

$$\mathcal{D}^\alpha \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad (31)$$

donde ahora el operador  $\mathcal{D}^\alpha$  significa que todos los estados se derivan con orden  $\alpha$ . Además, con objeto de simplificar las expresiones resultantes, es habitual suponer que  $0 < \alpha \leq 1$ .



Si se toman transformadas de Laplace en (31), en el caso de que  $0 < \alpha \leq 1$ , se obtiene que:

$$s^\alpha \mathbf{X}(s) - s^{\alpha-1} \mathbf{x}(0) = \mathbf{A} \mathbf{X}(s) + \mathbf{B} \mathbf{U}(s) \Rightarrow \mathbf{X}(s) = (s^\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}(s) + (s^\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} s^{\alpha-1} \mathbf{x}(0) \quad (32)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \mathbf{X}(s) + \mathbf{D} \mathbf{U}(s). \quad (33)$$

En el caso de condiciones iniciales nulas ( $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ ), (32) se convierte en

$$\mathbf{X}(s) = (s^\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}(s), \quad (34)$$

que combinada con (33) da lugar a

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s), \quad \mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s^\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}, \quad (35)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de dimension  $n \times n$ , y la matriz  $\mathbf{G}(s)$  tiene  $p$  filas y  $m$  columnas.  $\mathbf{G}(s)$  representa una matriz de funciones de transferencia cuyos numeradores y denominadores se expresan en función de potencias enteras de  $s^\alpha$ . Consecuentemente, se hace notar que la hipótesis  $\alpha_i = \alpha$  implica que el sistema (29)–(30) es de orden conmensurable.

### 3.3. Comportamiento dinámico

Como consecuencia de todo lo anterior, a partir de ahora se considerarán sólo los *sistemas LTI de orden conmensurable*. A continuación se estudia su dinámica.

#### 3.3.1. Respuesta temporal

La hipótesis anterior implica que  $G(s)$  es de la forma  $G(\lambda)$ , con  $\lambda = s^\alpha$ . Si se realiza la descomposición en fracciones simples, obtenemos

$$G(\lambda) = \frac{\sum_{k=0}^m a_k \lambda^k}{\sum_{k=0}^n b_k \lambda^k} = \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{\lambda - p_k} \Rightarrow G(s) = \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{s^\alpha - p_k} \quad (36)$$

Teniendo en cuenta la relación

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - p} \right\} = t^{\beta-1} \mathcal{E}_{\alpha,\beta}(pt^\alpha), \quad (37)$$

donde  $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(z)$  es la función de Mittag-Leffler de dos parámetros, definida como

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \Re(\alpha) > 0, \quad \Re(\beta) > 0, \quad (38)$$

haciendo  $\beta = \alpha$  se obtiene la respuesta impulsional del sistema:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G(s)\} = \sum_{k=1}^n r_k t^{\alpha-1} \mathcal{E}_{\alpha,\alpha}(p_k t^\alpha). \quad (39)$$

De la misma manera, la respuesta ante escalón unitario:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{r_k s^{-1}}{(s^\alpha - p_k)} \right\}, \quad (40)$$

puede obtenerse haciendo  $\beta = \alpha + 1$  en (37):

$$y(t) = \sum_{k=1}^n r_k t^\alpha \mathcal{E}_{\alpha,\alpha+1}(p_k t^\alpha). \quad (41)$$

La función de Mittag-Leffler desempeña en los sistemas fraccionarios el mismo papel que la función exponencial en los de orden entero, por ser la función propia de las ecuaciones diferenciales que los caracterizan. Igual que en los sistemas de orden entero, la forma de la respuesta transitoria está definida por el argumento de dicha función, que se corresponde con la posición en el plano complejo de los polos de  $G(\lambda)$  o valores propios de la matriz de estado. El sistema será estable siempre que  $|\arg(p_k)| > \alpha \frac{\pi}{2}$ ,  $\forall k$ . En la Figura 4 se representan todas estas posibilidades.

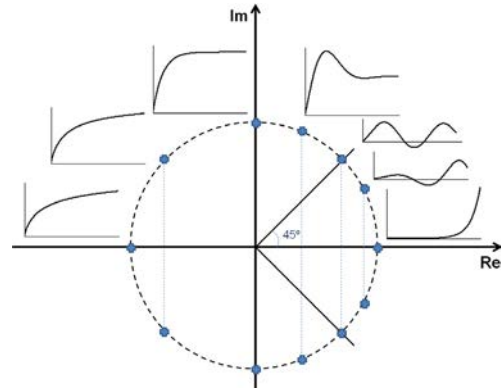


Figura 4: Posición de los polos sobre la circunferencia unidad en el plano complejo y respuestas transitorias asociadas.

#### 3.3.2. Respuesta en frecuencia

Con carácter general, la respuesta en frecuencia debe obtenerse mediante la evaluación directa de la función de transferencia de orden irracional a través del eje imaginario haciendo  $s = j\omega$ ,  $\omega \in [0, \infty)$ . Sin embargo, en el caso de sistemas de orden conmensurable, se pueden obtener diagramas análogos a los de Bode, es decir, la respuesta en frecuencia puede obtenerse mediante la suma de las contribuciones individuales de los términos de orden  $\alpha$  resultantes de factorizar la función

$$G(\lambda) = \frac{\prod_{k=1}^m (\lambda - z_k)}{\prod_{k=1}^n (\lambda - p_k)} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{\prod_{k=1}^m ((j\omega)^\alpha - z_k)}{\prod_{k=1}^n ((j\omega)^\alpha - p_k)}.$$

En cada uno de estos factores, y suponiendo  $z_k, p_k < 0$ , el diagrama de módulos tiene una pendiente que comienza en cero a bajas frecuencias y tiende a  $\pm 20\alpha$  dB/dec a altas frecuencias. El diagrama de fases evoluciona desde 0 a bajas frecuencias hasta  $\pm \alpha\pi/2$  rad a altas frecuencias. Según que el factor esté en el numerador o denominador, la contribución del mismo será positiva o negativa.

### 3.3.3. Controlabilidad y Observabilidad

Las condiciones de controlabilidad y observabilidad son análogas a las de los sistemas de orden entero.

El sistema (31) es controlable si la matriz

$$\mathcal{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \dots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]. \quad (42)$$

es de rango completo  $n$ . Y el sistema (31)–(30) es observable si la matriz

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

es de rango completo  $n$ .

## 4. Control fraccionario

### 4.1. Generalidades

Es habitual en los primeros cursos de control realimentado introducir las *acciones básicas de control* y sus efectos en el comportamiento del sistema controlado haciendo uso del dominio de la frecuencia. Así, se sabe que estas acciones (proporcional, derivativa e integral) tienen como efectos principales:

- proporcional: incrementar la velocidad de la respuesta y disminuir el error estacionario y la estabilidad relativa;
- derivativa: aumentar la estabilidad relativa y la sensibilidad al ruido;
- integral: eliminar el error estacionario y disminuir la estabilidad relativa.

Los efectos positivos de la acción derivativa (aumento de la estabilidad relativa) se pueden observar en la respuesta en frecuencia por el adelanto de fase de  $\pi/2$  introducido, y los negativos (incremento de sensibilidad a los ruidos de alta frecuencia) por el incremento de pendiente de 20 dB/dec en la curva de ganancia. Para la acción integral, la eliminación del error estacionario puede deducirse por la ganancia infinita en continua, y la disminución de estabilidad relativa por el retardo de  $\pi/2$  en la fase. Así pues, es natural concluir que generalizando estas acciones de control de la forma  $s^n, 1/s^n, n \in \mathbb{R}^+$ , es posible obtener compromisos más satisfactorios entre efectos positivos y negativos, y que combinando las acciones se podrán desarrollar métodos de diseño más potentes y flexibles para satisfacer las especificaciones. La combinación de estas acciones básicas de control generalizadas daría lugar al denominado *PID fraccionario*, que en el dominio de Laplace puede ponerse de la forma

$$PID(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+. \quad (44)$$

Teniendo en cuenta que un PID introduce una ganancia, un polo en el origen y dos ceros, y que su sintonía

puede verse como la selección apropiada de la ganancia y los ceros para que la respuesta del sistema controlado sea la especificada, disponer de los parámetros adicionales  $\lambda$  y  $\mu$ , los órdenes de la integral y la derivada respectivamente, proporciona otros grados de libertad: en particular, elegir las pendientes de alta y baja frecuencia en la aportación del controlador. En (Dormido et al., 2012), utilizando el entorno Sysquake, se presentan dos herramientas interactivas que permiten diseñar controladores PID fraccionarios tanto analizando los efectos de cada uno de los parámetros en la respuesta (temporal o frecuencial), como obteniéndolos aplicando técnicas de conformado de lazo (loop shaping).

Como puede inducirse de lo expuesto hasta el momento, las técnicas de diseño en el dominio de la frecuencia son especialmente adecuadas para el caso de sistemas fraccionarios.

Los ejemplos que se presentan están concebidos para mostrar las posibilidades de uso del control fraccionario, fundamentalmente para el control realimentado de sistemas de orden entero que son los que habitualmente se consideran en ingeniería de control. En otras palabras, se trata de mostrar las posibilidades de una herramienta, y será el problema concreto de control el que diga si los resultados aconsejan su uso o no. Siempre estará la opción de elegir valores enteros para los órdenes de derivadas e integrales, y utilizar las distintas estrategias de control como se viene haciendo habitualmente.

### 4.2. Casos de estudio

Para mostrar algunas técnicas básicas de control fraccionario se han elegido dos casos de estudio: el doble integrador y el servomecanismo de posición. El primero porque, como ya se vio en la introducción, aparece en los orígenes del control fraccionario como función de referencia alternativa y es uno de los sistemas fundamentales en aplicaciones de control (Rao y Bernstein, 2001) por representar el movimiento de traslación o rotación con un solo grado de libertad, aplicable a múltiples problemas de control: sistemas con baja fricción (el servo ideal de Tustin y Manabe), movimiento libre del sólido rígido, guiado de vehículos y control de grupos de vehículos, robótica, etc. El segundo porque es el modelo habitual de los sistemas de control de posición y el sistema de referencia comúnmente utilizado.

La dinámica del doble integrador viene dada por la ecuación diferencial  $\ddot{y}(t) = u(t)$ , la representación de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (45)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (46)$$

o la función de transferencia

$$P(s) = \frac{1}{s^2}. \quad (47)$$

En el caso del servomecanismo de posición, los modelos correspondientes son:

$$k_m u(t) = \tau \ddot{y}(t) + \dot{y}(t), \quad (48)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_m/\tau \end{bmatrix} u, \quad (49)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (50)$$

$$P(s) = \frac{k_m}{s(\tau s + 1)}. \quad (51)$$

#### 4.3. Control clásico

Existe una amplia literatura sobre el uso de PID fraccionarios, argumentando, principalmente, la flexibilidad ofrecida al poder sintonizar de manera más fina los órdenes de la derivada y de la integral (ver (Monje et al., 2010) o el capítulo 15 de (Vilanova y Visioli, Eds.)). Los beneficios de esto pueden verse desde dos puntos de vista: las nuevas posibilidades de conformar el lazo (técnicas de loop shaping), o la posibilidad de satisfacer más especificaciones al tener más parámetros de ajuste. Es claro que los métodos de diseño y los controladores resultantes resultan ser más complejos, y eso sin tener en cuenta la necesidad de aproximar, ya sea los operadores por separado o los controladores en su conjunto.

Se considera a continuación un control PD con ley de control del tipo

$$u(t) = k_p(r(t) - y(t)) - k_d \dot{y}(t), \quad (52)$$

con lo que el sistema controlado tendrá una función de transferencia de la forma:

$$F_{PD}(s) = \frac{k_p}{s^2 + k_d s + k_p}. \quad (53)$$

Las ganancias del controlador se sintonizan para obtener una sobreoscilación  $M_p \simeq 0,08$  y un tiempo de pico  $t_p \simeq 4$  s. Así,  $k_p = 1$  y  $k_d = 1,25$ .

Como alternativa, se propone un controlador de la forma  $\mathcal{D}^\alpha$ , con lo cual la ley de control es

$$u(t) = \omega_g^{2-\alpha} D^\alpha(r(t) - y(t)) \quad (54)$$

y el sistema controlado adquiere la forma ya mencionada en la introducción

$$F_{D\alpha}(s) = \frac{\omega_g^{2-\alpha}}{s^{2-\alpha} + \omega_g^{2-\alpha}} \quad (55)$$

Las respuestas al escalón para distintos valores de  $\alpha$  se muestran en la Figura 5, en la que se puede observar que incluso en el caso de obtener una sobreoscilación y un tiempo de pico similares, las evoluciones temporales son diferentes.

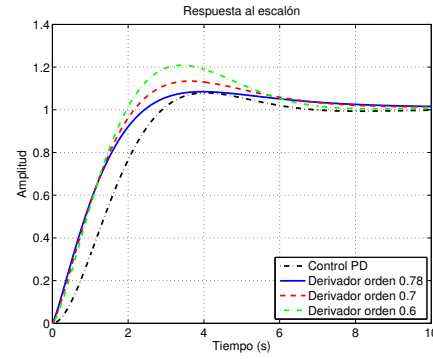


Figura 5: Comparación de respuestas al escalón: control PD y derivador fraccionario.

#### 4.4. Control en el espacio de estados

... la creación de estructuras, o el reconocimiento de modelos, no es más que la destrucción selectiva de información.

Gunther S. Stent (op.cit.)

Las técnicas de control en el espacio de estados exigen la descripción del sistema en este mismo dominio, es decir, un modelo de estados del sistema a controlar. En el caso de que el sistema sea de orden conmensurable, se pueden aplicar las técnicas tradicionales directamente, aunque teniendo en cuenta las nuevas relaciones entre localización de polos y comportamiento dinámico para estos sistemas. No obstante, el caso más habitual y el aquí considerado es que nuestro sistema sea de orden entero. En este caso, utilizando la técnica presentada en (HosseinNia et al., 2010), es posible obtener un modelo fraccionario con la introducción de «pseudoeestados» que permitan inducir una dinámica fraccionaria en el sistema mediante el controlador. Ello exige, naturalmente, el uso de observadores de estado que son los que incorporan los pseudoeestados al sistema. A partir de ese momento, y teniendo en cuenta como siempre las implicaciones dinámicas de la ubicación de los polos en lazo cerrado, el procedimiento de diseño se puede hacer de la manera habitual.

El significado físico de esos pseudoeestados, lo mismo que el de los operadores fraccionarios (o su interpretación geométrica), es un asunto de gran interés pero que está fuera de los propósitos de este trabajo. Se harán solamente un par de comentarios. Primero, el control en el espacio de estados no exige que todas las variables de estado tengan un significado físico, sino tan solo aquellas que medimos y que, habitualmente, tomamos como salidas. El uso de observadores libera de dicha exigencia. En segundo lugar, el observador permite «mirar dentro» del sistema y obtener cuanto información dinámica resulte conveniente para propósitos de control, ya venga ésta ofrecida por estados o pseudoeestados. Siempre se hace uso de lo que en el epígrafe de esta sección se denomina «destrucción selectiva de información».



Como ejemplo de uso se aplicará al doble integrador la técnica de recuperación del lazo (LQR/LTR) cuyos fundamentos se pueden encontrar en (Stein y Athans, 1987). Para ello, primero se obtiene el sistema aumentado correspondiente al doble integrador, definiendo el vector de estados (y pseudoestados)

$$x = [x_1 = y \quad x_2 = \mathcal{D}^{0,5}x_1 \quad x_3 = \mathcal{D}^{0,5}x_2 = \dot{y} \quad x_4 = \mathcal{D}^{0,5}x_3] \quad (56)$$

Se obtiene así el modelo

$$\dot{x}^{(0,5)} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (57)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (58)$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \quad (59)$$

El problema se presenta en la Figura 6(a). Se pretende diseñar el controlador  $C(s)$  de la forma

$$C(s) = K(sI - A + HC + BK)^{-1}H, \quad (60)$$

para lo cual es necesario obtener las matrices de ganancias  $H$  y  $K$  de la Figura 6(b).

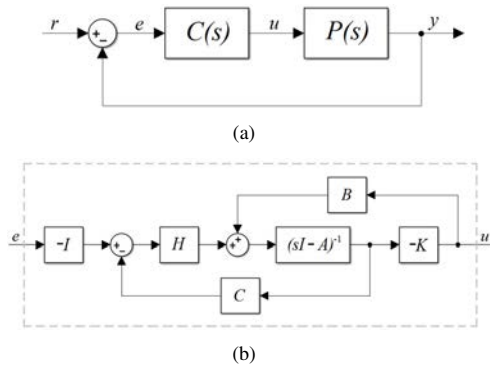


Figura 6: Diagrama de bloques del problema: (a) sistema controlado (b) controlador LQG/LTR  $C(s)$ .

Aplicando el procedimiento, se define primero el denominado bucle objetivo

$$G_F(s) = C\Phi(s)H, \quad \Phi(s) = (sI - A)^{-1}, \quad (61)$$

siendo  $H$  la matriz de ganancias de un filtro de Kalman ficticio, obtenida mediante la solución de la ecuación matricial

$$AP + PA^T + LL^T - \frac{1}{\sigma}PC^T CP = 0 \quad (62)$$

$$H = \sigma^{-1}PC^T \quad (63)$$

donde  $L$ , la matriz que pondera el ruido del proceso, y  $\sigma$ , que determina la intensidad del ruido en las medidas en el

problema tradicional de Kalman, son ahora parámetros de diseño. En la etapa de recuperación del lazo, se soluciona el problema LQR

$$J = \int_0^\infty [x^T Qx + u^T Ru] dt, \quad (64)$$

resolviendo, para  $Q = C^T C$  y  $R = \rho I$ , la ecuación

$$SA + A^T S + C^T C - \frac{1}{\rho} SBB^T S = 0. \quad (65)$$

para así obtener las ganancias de la forma

$$K = \rho^{-1}B^T S. \quad (66)$$

Se puede probar que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (C(s)P(s)) = C\Phi(s)H. \quad (67)$$

El procedimiento para calcular  $K$  se repite para diferentes valores del parámetro de diseño  $\rho$  hasta obtener la recuperación del lazo deseada.

En las Figuras 7 y 8 se presentan la respuesta al escalón unitario del sistema doble integrador original para los parámetros  $\rho = [10, 1, 10^{-2}]$  y  $\sigma = [10^{-2}, 10^{-5}, 10^{-9}]$ : bucle objetivo para diferentes valores de  $\rho$  (Figura 7), y sistema controlado para  $\rho = 1$  y diferentes valores de  $\sigma$  (Figura 8).

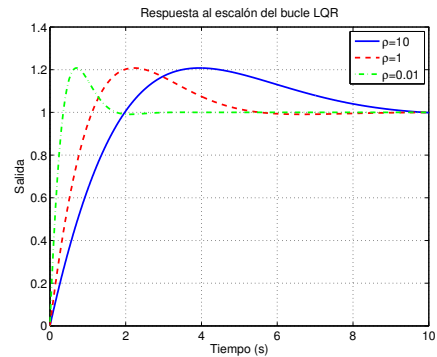


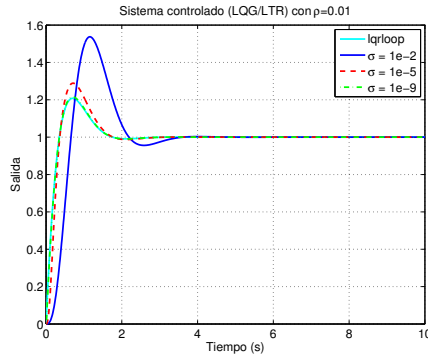
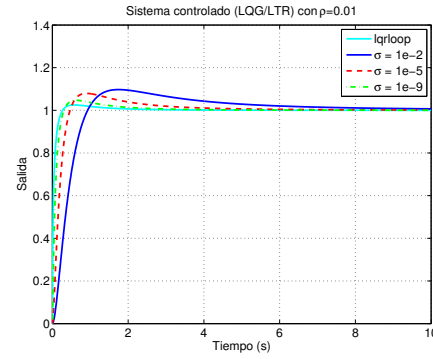
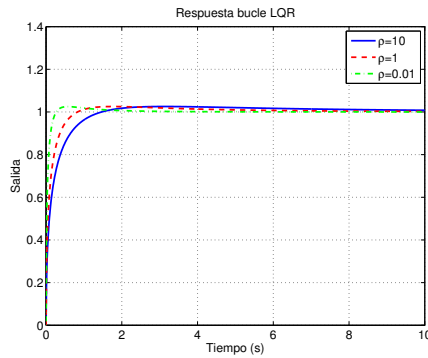
Figura 7: Respuestas del bucle LQR (bucle objetivo) para diferentes valores de  $\rho$ .

En las Figuras 9 y 10 se repite esta evaluación para el modelo aumentado del doble integrador (59).

#### 4.5. Control no lineal

El control fraccionario también se ha extendido a técnicas de control no lineal, principalmente control deslizante (SMC), control adaptativo (MRAS y Gain Scheduling), y control reset. Trabajos pioneros de algunas de estas técnicas se pueden ver en (Monje et al., 2010) y algunos desarrollos posteriores en (HosseiniNia, 2013) y (Tejado, 2014).

Ahora se considera el control de posición de un servo, en particular el del equipo Quanser Qube<sup>TM</sup>-Servo. Su modelo corresponde a (50) con  $1/\tau = 7,69$  y  $k_m/\tau =$

Figura 8: Respuestas del sistema controlado para diferentes valores de  $\sigma$ .Figura 10: Respuestas del sistema controlado para el sistema aumentado y diferentes valores de  $\sigma$ .Figura 9: Respuestas del bucle LQR (bucle objetivo) para el sistema aumentado y diferentes valores de  $\rho$ .

178,46. La superficie de deslizamiento elegida tiene la forma

$$S = \lambda_1(x_1 - r) + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4, \quad (68)$$

correspondiente a una dinámica en deslizamiento ideal ( $S = 0$ )

$$\frac{X_1(s)}{R(s)} = \frac{1}{\frac{\lambda_4}{\lambda_1} s^{1,5} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} s + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} s^{0,5} + 1}, \quad (69)$$

para el sistema aumentado. Para el sistema sin pseudoestados basta con poner  $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$ . El control es de la forma

$$u(t) = -S - \text{sgn}(S). \quad (70)$$

En las Figuras 11, 12 y 13 se muestran los resultados obtenidos utilizando dos métodos para obtener los pesos  $\lambda_i$  de  $S$  (optimización, y elección directa por localización de polos de (69), tanto para el caso entero (SMC en las figuras) como el fraccionario (FSMC en las figuras). Los valores obtenidos para las ganancias se muestran en la Tabla 1.

Los detalles de las simulaciones son los siguientes: 1) en este caso como en los anteriores, los operadores fraccionarios se han aproximado siguiendo el método de Oustaloup (Oustaloup, 1991) en un rango de frecuencias  $\omega \in [0,01, 100]$  rad/s; 2) la ley de control se ha implementado con la función pseudo-signo  $V(\delta) = \frac{\delta}{|\delta| + \delta}$  con  $\delta = 0,01$

(Edwards y Spurgeon, 1998); y 3) para obtener las respuestas del movimiento deslizante ideal (69) se ha utilizado la función `fode_sol()` (ver sección 5 y (Monje et al., 2010) para más detalles).

Tabla 1: Ganancias  $\lambda_i$ .

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
FSMC	3,04	0,04	0,18	0,01
SMC	4,16	—	0,36	—

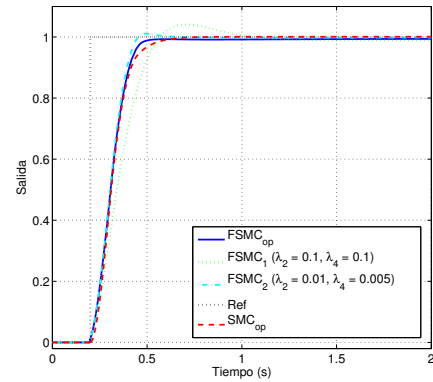


Figura 11: Control de posición del Qube™-Servo con SMC y FSMC: salida y.

## 5. Herramientas computacionales

Esta sección describe brevemente las principales herramientas computacionales desarrolladas para el modelado, análisis y diseño de sistemas de control de orden fraccionario basadas en MATLAB, destacando especialmente las cuestiones que las diferencian. La Tabla 2 resume las características más relevantes de cada una de ellas, así como

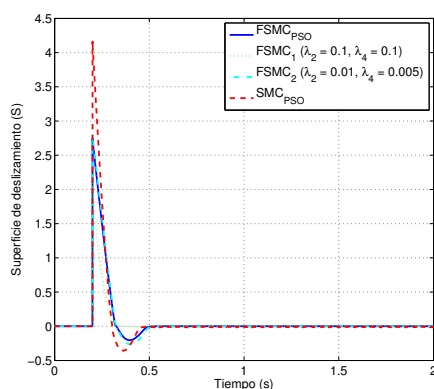


Figura 12: Control de posición del Qube™-Servo con SMC y FSMC: superficie de deslizamiento  $S$ .

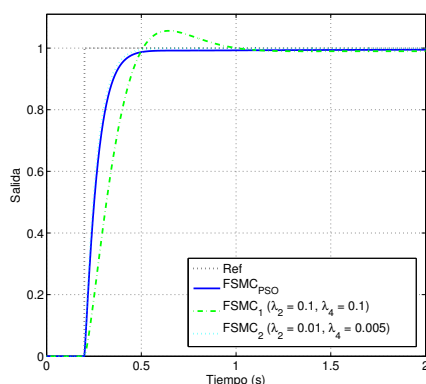


Figura 13: Movimiento deslizante ideal para el control de posición del Qube™-Servo.

otra información de interés para el lector. Se presentan un par de ejemplos a modo de guía de uso práctico.

Cabe destacar que se han omitido otras muchas herramientas computacionales que se han desarrollado para cálculo fraccionario a lo largo de estos años dado su enfoque a otras disciplinas distintas a la puramente de control; una revisión actual puede encontrarse en (Li et al., 2016; Petráš, 2011b) y en *File Exchange* de la web de The MathWorks, haciendo una búsqueda del término “fractional”.

### 5.1. @fof

@fof (de *fractional order transfer function*) es una herramienta para el control de sistemas fraccionarios desarrollada por Dingyü Xue et al. que extiende las principales funciones integradas en MATLAB para el análisis de los sistemas clásicos (de orden entero) para su aplicación a sistemas fraccionarios. En esencia, esto es posible gracias a una serie de funciones que permiten definir una clase TOTF (es decir, una función de transferencia de orden fraccionario) y, consecuentemente, trabajar con objetos TOTF.

### 5.2. CRONE Toolbox

El grupo de investigación francés CRONE tiene desarrolladas dos herramientas: *Crone CSD* (acrónimo de *Control System Design*), para el diseño de sistemas de control, y *ooCrone* (de *Object Oriented*), una versión orientada a objetos. La primera es la herramienta clásica del grupo que en la actualidad consta de un único módulo para el diseño y la implementación de controladores fraccionarios robustos tipo CRONE (de primera, segunda o tercera generación). En versiones anteriores a la actual, la V2015, esta herramienta incorporaba asimismo un módulo matemático y otro para la identificación de sistemas fraccionarios en el dominio del tiempo y la frecuencia. *ooCrone* es una herramienta orientada a objetos para el análisis de sistemas fraccionarios a partir de clases que permite definir sistemas fraccionarios, no solo mediante funciones de transferencia, como en el caso de @fof, sino también a partir de su ganancia, ceros y polos y como modelo de estado. De este modo, *ooCrone* también permite utilizar los comandos clásicos de Matlab para el análisis y simulación de sistemas enteros para los de orden fraccionario.

### 5.3. FOMCON

FOMCON (acrónimo de *Fractional-order Modeling and Control*) es una herramienta para el modelado y control de sistemas fraccionarios desarrollada por Aleksei Tepljakov. Se trata de una herramienta bastante completa, que incorpora hasta seis módulos para el análisis e indentificación de sistemas fraccionarios, el diseño, optimización e implementación de controladores PID fraccionarios, así como para el diseño de controladores PID de orden entero para sistemas fraccionarios. La principal característica de FOMCON es que cada uno de los módulos dispone de su propia interfaz gráfica de usuario que facilita considerablemente su uso. Asimismo, se trata de una herramienta compatible con las dos anteriores, en el sentido de que, por un lado, utiliza @fof para la definición de la clase asociada a los sistemas fraccionarios, y por otro, permite exportar el modelo del sistema (función de transferencia y modelo de estados) de la forma de ooCrone. Otra particularidad de FOMCON es que incorpora una librería de Simulink con bloques para el operador (derivada e integrador) fraccionario, la función de transferencia fraccionaria (de tiempo continuo o discreto) y los controladores PID fraccionarios clásico (también continuo y discreto) y óptimo, y el controlador Tilt integral-derivativo (TID).

### 5.4. Ninteger

La herramienta *Ninteger* (de *Non-integer*) surgió en 2005 a raíz de la tesis doctoral de Duarte Valério para el modelado y análisis de sistemas de control fraccionarios. La principal característica de *Ninteger* es que implementa una gran variedad de métodos de aproximación de las derivadas de orden no entero: para el caso continuo, la aproximación de Oustaloup, los métodos de Carlson y Matsuda y las

aproximaciones de fracción continuada de alta y baja frecuencia; y para el caso digital, Tustin, Simpson, transformada Delta, basada en la respuesta al impulso y al escalón y las aproximaciones de diferencias finitas hacia atrás de primer, segundo y tercer orden. Asimismo, cabe destacar que dispone de interfaz gráfica de usuario para el diseño de controladores fraccionarios, en concreto, PIDs y CRONEs de segunda o tercera generación, definiciones de derivadas fraccionarias de orden variable, así como de una librería de Simulink, formada por bloques para el operador derivada y el controlador PID fraccionario, ambos con opciones de selección del método de aproximación de entre los antes mencionados.

### 5.5. Otras

A continuación se citan otros materiales que podrían resultar útiles para el lector:

- *FSST* – librería de Simulink para sistemas fraccionarios discretos en espacio de estados, desarrollada por (Sierociuk, 2003). Principalmente, destacar el bloque que implementa el filtro de Kalman fraccionario.
- *FOCP* – herramienta para problemas de control óptimo fraccionario usando la aproximación recursiva de Oustaloup, desarrollada por (Tricaud, 2008).
- *DFOC()* – función para obtener la función de transferencia de un controlador PID fraccionario discreto, desarrollada por (Petrás, 2011a).
- *NFOC()* – función para obtener la ecuación de un controlador PID fraccionario no lineal, desarrollada por (Petrás, 2015).
- *forlocus()* – función para representar el lugar de las raíces de sistemas fraccionarios, desarrollada por (Li, 2015). Otro código de MATLAB para el mismo propósito puede encontrarse en (Tenreiro Machado, 2011).

### 5.6. Ejemplos

En la literatura especializada se pueden encontrar multitud de ejemplos de sistemas físicos cuyas características dinámicas hacen pertinente el uso de modelos fraccionarios, ya que los operadores fraccionarios son adecuados para modelar fenómenos tales como: transporte de masa, transporte de carga, memoria, actuación distribuida, viscoelasticidad, porosidad, fractalidad, etc. (ver, e.g., el capítulo 10 de (Podlubny, 1999a)). No obstante, por brevedad y claridad en la exposición, los ejemplos aquí tratados son diseñados *ad hoc*.

**Ejemplo 1.** Se tiene el siguiente sistema fraccionario

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^{2.3} + 3.2s^{1.4} + 2.4s^{0.9} + 1}. \quad (71)$$

Se muestra a continuación cómo se podría analizar este sistema en MATLAB en el dominio del tiempo y de la frecuencia con las herramientas *@fotf* y *ooCrone*.

Con *@fotf*, la definición de la función de transferencia del sistema se hace a partir de vectores con los coeficientes y órdenes tanto del numerador como del denominador, es decir:

```
b=[1]; nb=[0]; %N(s)
a=[1 3.2 2.4 1]; na=[2.3 1.4 0.9 0]; %D(s)
G=fotf(a,na,b,nb); %F. transferencia
```

De manera alternativa, el sistema podría haberse definido como:

```
s=fotf('s');
G=1/(s^(2.3)+3.2*s^(1.4)+2.4*s^(0.9)+1);
```

Para obtener su respuesta exacta ante una determinada entrada *u* (suma de escalones de diferente amplitud), considerando un incremento de tiempo de 50 ms

```
u=[ones(1,800) 1.5*ones(1,600)...
0.4*ones(1,1000)];
Ts=0.05;
```

*t*=(0:length(u)-1)\*Ts; %Vector de tiempo  
se tendrían dos opciones. En el primer caso, utilizar el comando clásico de MATLAB *lsim()*:

```
y=lsim(G,u,t);
```

o bien, resolver la ecuación diferencial que describe la dinámica del sistema, es decir

$$\mathcal{D}^{2.3}y(t) + 3.2\mathcal{D}^{1.4}y(t) + 2.4\mathcal{D}^{0.9}y(t) + y(t) = u(t), \quad (72)$$

mediante el comando *fode\_sol()* de la herramienta:

```
y1=fode_sol(a,na,b,nb,u,t);
```

Si ahora se quiere obtener un modelo entero aproximado del sistema utilizando la aproximación modificada de Oustaloup (ver e.g. (Monje et al., 2010)) de orden 4 para el rango de frecuencias  $\omega \in [10^{-3}, 10^3]$  rad/s, se procedería como sigue. Primeramente, habría que aproximar las partes estrictamente fraccionarias de los órdenes de derivación o integración,

```
N=3; w1=1e-3; w2=1e3; %Datos aprox.
g3=ousta_fod(0.3,N,w1,w2); %Aprox. s^0.3
g2=ousta_fod(0.4,N,w1,w2); %Aprox. s^0.4
g1=ousta_fod(0.9,N,w1,w2); %Aprox. s^0.9
```

para obtener posteriormente el modelo de orden entero del sistema como

```
s=tf('s');
```

```
G_Oust=1/(s^2*g3+3.2*s*g2+2.4*g1+1);
```

que resulta en un modelo con 21 ceros y 23 polos. (Evidentemente, este modo de proceder es poco práctico, pues resultará casi siempre más ventajoso obtener un modelo entero aproximado del sistema utilizando técnicas de identificación en el dominio de la frecuencia).

Las respuestas temporales exactas del sistema y las del modelo aproximado se muestran en la Figura 14. Se puede observar que las dos respuestas exactas obtenidas coinciden, mientras que existe una pequeña diferencia entre éstas y la del modelo aproximado.

Si se resuelve este mismo ejemplo con la herramienta *ooCrone*, la definición de la función de transferencia se

Tabla 2: Herramientas computacionales más relevantes para el modelado, análisis y diseño de sistemas de control fraccionarios

Herramienta	Aplicaciones/Módulos	Interfaz de usuario	Comando para abrir la interfaz	Librería de Simulink (comando)	Sistemas con retardo	Manual	Web de descarga
@fof	Análisis y control de sistemas fraccionarios (orientado a objetos)	No	–	No	Sí	(Chen et al., 2009) (Monje et al., 2010)	–
CRONE Toolbox	1) <i>Crone CSD</i> : diseño de sistemas de control fraccionarios (tipo CRONE)	Sí	<code>crone_control</code>	No	No	(CRONE Group, 2010c)	(CRONE Group, 2010a) <sup>1</sup>
	2) <i>ooCrone</i> : análisis de sistemas fraccionarios (orientado a objetos)	No	–		No	(CRONE Group, 2010b)	
FOMCON	1) Análisis de sistemas fraccionarios	Sí	<code>fomcon</code>	Sí (fod)	Sí	(Tepljakov, 2015)	(Tepljakov, 2016)
	2) Diseño de PID fraccionarios	Sí	<code>fpid</code>				
	3) Optimización de PID fraccionarios	Sí	<code>fpid_optim</code>				
	4) Diseño de PID clásicos para sistemas fraccionarios	Sí	<code>iopid_tune</code>				
	5) Identificación de sistemas fraccionarios (dominio del tiempo y frecuencia)	Sí	<code>fotfid / fotfrid</code>				
	6) Implementación de controladores fraccionarios (dominio de la frecuencia)	Sí	<code>impid</code>				
Ninteger	1) Análisis de sistemas fraccionarios (dominio de la frecuencia)	No	<code>ninteger</code>	Sí (nintblocks)	Sí	(Valério, 2005c)	(Valério, 2005a,b)
	2) Diseño de controladores PID fraccionarios y tipo CRONE	Sí					
	3) Identificación de sistemas fraccionarios (dominio de la frecuencia)	No					

<sup>1</sup> Para descargarlas, hay que registrarse en la web y recibir autorización del administrador.

haría creando una clase con `frac_tf()`, que necesita la función `frac_poly_exp()` para definir polinomios de orden fraccionario a partir de sus coeficientes y sus órdenes, como se indica:

```
G=frac_tf(frac_poly_exp(b,nb),...
frac_poly_exp(a,na),N,[w1,w2]);
```

Nótese que los dos últimos argumentos (N: orden de la aproximación y [w1, w2]: rango de frecuencias para la aproximación) sólo son necesarios cuando se quiera aproximar el sistema.

Una vez definido el sistema, previo a la obtención de su respuesta temporal, se debe seleccionar el método de resolución de la ecuación diferencial fraccionaria con el comando `set()` (la resolución exacta se obtiene con la fórmula de Grünwald-Letnikov, mientras que también se puede optar por aproximar el sistema fraccionario y simular). Por ejemplo:

```
set(G,'sim','grun'); %Método Grünwald
y_Grun=lsim(G,u,t);
set(G,'sim','Oust'); %Aprox. Oustaloup
y_Oust=lsim(G,u,t);
set(G,'sim','Trig'); %Aprox. Trigeassou
y_Trig=lsim(G,u,t);
```

La respuesta en frecuencia del sistema fraccionario se puede obtener, gracias a las clases definidas con ambas herramientas, simplemente definiendo el vector de frecuencias para el rango de interés

```
w=logspace(-4,4,200);
```

y usando el comando `bode()` como se indica:

```
rf=bode(G,w);
```

```
[mag fase]=bode(G_aprox,w);
```

donde  $G$  es la planta definida como función de transferencia fraccionaria y  $G_{aprox}$ , la función de transferencia del modelo aproximado. Nótese que en el primer caso no es posible obtener la magnitud y la fase de la respuesta en frecuencia directamente, pero sí a partir de `rf.ResponseData` (variable dentro de la estructura de datos resultado que contiene la respuesta en frecuencia del sistema). Por lo tanto, la magnitud y la fase (en °) se pueden obtener haciendo

```
rf.ResponseData=squeeze(rf.ResponseData);
m=20*log10(abs(rf.ResponseData));
f=rad2deg unwrap(angle(rf.ResponseData));
```

(las funciones `squeeze()` y `unwrap()` se usan para eliminar el exceso de dimensiones en `rf.ResponseData` y corregir la fase, respectivamente).

Las respuestas en frecuencia del sistema fraccionario (71) se muestran en la Figura 15. Se observa que las respuestas en frecuencia de los modelos aproximados difieren de la exacta especialmente en fase, y sobre todo a alta frecuencia. La respuesta en frecuencia exacta se ha obtenido sustituyendo la variable  $s$  en la función de transferencia por  $j\omega$ :

```
s=j*w;
G_ex=1./(s^(2.3)+3.2*s^(1.4)+...
+2.4*s^(0.9)+1);
```

**Ejemplo 2.** Considérese el siguiente sistema fraccionario



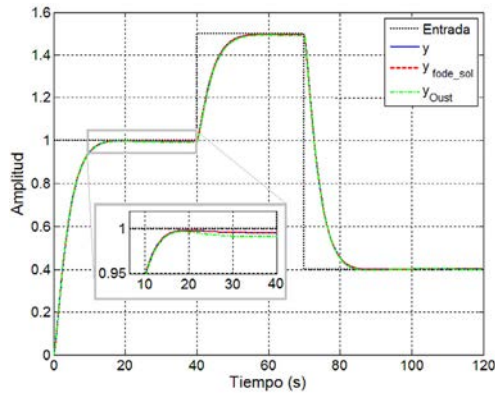


Figura 14: Respuestas temporales del sistema fraccionario (71) con la herramienta @fotf.

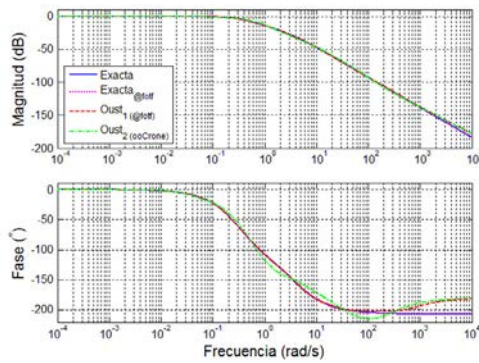


Figura 15: Respuestas en frecuencia del sistema fraccionario (71) con las herramientas @tof y ooCrone.

de orden conmensurable

$$G(s) = \frac{1}{s^{1,5} + 10s + s^{0,5} + 1}. \quad (73)$$

Se van a usar las herramientas FOMCON y Ninteger para obtener su modelo de estado y analizar el sistema en el dominio de la frecuencia.

Una vez definida la planta con la herramienta @fotf, el análisis con FOMCON es sencillo, siguiendo los siguientes pasos: 1) escribir `fomcon` en la ventana de comandos de MATLAB para abrir la interfaz gráfica de usuario; 2) elegir el sistema fraccionario con el que se quiere trabajar (la herramienta reconoce todas las funciones de transferencia que estén en el espacio de trabajo); 3) en el menú de funciones de transferencia de orden fraccionario (a la izquierda), elegir exportar el sistema como espacio de estados fraccionario en el menú desplegable de abajo; y 4) pulsar el botón 'Go', indicando el nombre con el que se quiere guardar la nueva variable. El resultado viene expresado de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha \mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{aligned}$$

$$\text{con } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{D} = 0$  y  $\alpha = 0,5$ . También es posible exportar el sistema como función de transferencia y espacio de estados con formas compatibles con *ooCrone*.

Si fuera preciso, además, obtener la respuesta en frecuencia de este sistema, por ejemplo, con *Ninteger* se utilizaría el comando

```
bodeFr(tf(1,[1 10 1 1]),0.5);
```

Como ejemplo de identificación, se obtiene la salida del sistema (73) para una entrada que es la suma de un conjunto de senoidales de amplitud 5 y frecuencias comprendidas entre 0,01 y 0,3 rad/s y se le suma un ruido blanco de amplitud 0,8. Para proceder con la identificación, hay que cargar la herramienta con el comando `fotfid` y seguir los siguientes pasos:

1. Importar los datos a identificar a través del menú 'Import' – 'Time domain data', asignándoles un nombre. De este modo, automáticamente se actualiza la casilla 'FIDATA objects' del menú 'Identification and options' con los datos cargados. Es recomendable representar los datos importados para verificar que no hay errores. Para ello, ir al menú 'Data' – 'Plot'.
2. Elegir el método de ajuste de entre Trust-Region-Reflective o Levenberg-Marquardt (el método por defecto es el primero).
3. Indicar la estructura del modelo a identificar. Entre otras opciones, es posible fijar el numerador o denominador, así como el rango de variación del orden fraccionario.
4. Pulsar el botón 'Identify'. La información del proceso de identificación se puede ir comprobando en la ventana que se abre automáticamente al iniciar el proceso. En ella, es posible parar el proceso en cualquier instante mediante el botón 'STOP' (recomendable cuando el número de iteraciones sea elevado para no alargar demasiado el proceso).
5. Una vez obtenido el modelo, la función de transferencia se muestra en la ventana principal. En nuestro caso, ésta es:

$$G_{est} = \frac{1}{2,31s^{1,35} + 9,43s^{0,92} + 0,83s^{0,46} + 1,18s^{0,02}}. \quad (74)$$

Asimismo, la herramienta proporciona los resultados de validación del modelo, en términos de la norma del error y porcentaje de ajuste con los datos originales, en el menú 'Model' - 'Validate' (véase la Figura 16).

## 6. Conclusiones y perspectivas futuras

En las conclusiones de (Vinagre y Monje, 2006) se decía: «Queda, sin embargo [...] la formulación clara de una Teoría de Control para Sistemas de Orden Generalizado, es decir, queda reformular la actual teoría de control

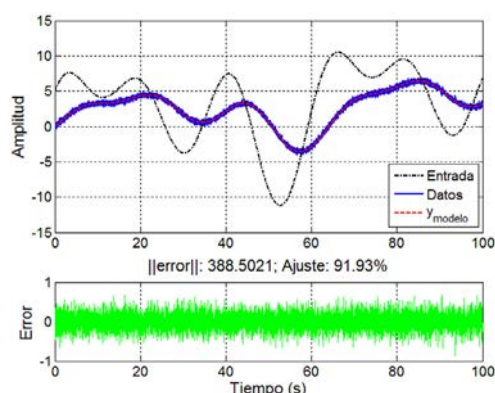


Figura 16: Resultados de identificación en el dominio del tiempo con la herramienta FOMCON.

(al menos de sistemas LTI) tomando los sistemas de orden entero como casos particulares». Aunque ésta es todavía una tarea pendiente, es mucho lo que se ha avanzado en el tiempo transcurrido desde aquel trabajo a éste: el PID fraccionario se ha empezado a utilizar en aplicaciones prácticas, se ha profundizado en la generalización de estrategias de control, tanto lineales como no lineales, utilizando modelos entrada-salida y modelos de estado, y, lo que es más importante desde un punto de vista práctico para el posible usuario, se han desarrollado herramientas computacionales que permiten el acceso al control fraccionario sin necesidad de conocer en profundidad todo el aparato matemático que lleva aparejado.

Esto mismo es lo que se ha pretendido con este artículo, entendiendo que el lector interesado accederá a los asuntos de detalle consultando la bibliografía básica suministrada en caso de que le resulte necesario. Al mismo tiempo, se ha querido hacer evidente que la principal ventaja del control fraccionario deriva del hecho simple de poder variar de forma continua los órdenes de las derivadas e integrales utilizadas en los algoritmos de control; y su principal inconveniente la complejidad añadida a dichos algoritmos, bien sea por el mayor número de parámetros a sintonizar, bien por el mayor número de operaciones a realizar (correspondiente al orden de las aproximaciones).

La popularidad creciente del control fraccionario es indiscutible, y como muestra de ello, en el apéndice se presenta una breve noticia bibliográfica sobre las publicaciones en este campo.

## English Summary

### Fractional Control: Fundamentals and User Guide

#### Abstract

The purpose of this tutorial on fractional control is to present the foundations of this discipline and the main computational tools available for its use and application by the

control engineer. The chosen approach aims to make accessible from the very beginning its location in the classical control and the foundations for a clear understanding on how any control strategy that makes use of the derivative and / or the integral operators (i.e., almost all) can be generalized by considering these operators with not necessarily integer order. The case studies considered (the double integrator and the position servo) have been chosen not to expose the benefits of fractional control, but to show the range of possibilities that provides remarkably even considering its application to systems of common use in the literature of control.

**Keywords:**

Fractional Control, Fractional Systems, Robust Control.

## Referencias

- Aström, K. J., Murray, R. M., 2008. Feedback Systems. An Introduction for Scientists and Engineers. Princeton University Press, Princeton.
- Bennett, S., 1993. A History of Control Engineering 1930–1955. Peter Peregrinus (IEE), London.
- Bode, H., 1940. Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design. Bell System Technical Journal 19, 421–454.
- Bode, H., 1945. Network Analysis and Feedback Amplifier Design. Van Nostrand.
- Carlson, G. E., Halijak, C., 1961. Simulation of the fractional derivative operator  $\sqrt{s}$  and the fractional integral operator  $\sqrt{1/s}$ . In: Proceedings of the Central States Simulation Council Meeting on Extrapolation of Analog Computation Methods. Kansas, USA, pp. 1–22.
- Chen, Y. Q., Petráš, I., Xue, D., 2009. Fractional order control - A tutorial. In: Proceedings of the American Control Conference (ACC'09). pp. 1397–1411.
- CRONE Group, 2010b. Crone toolbox.  
URL: <http://archive.ims-bordeaux.fr/CRONE/toolbox>
- CRONE Group, 2010b. Brief Presentation of the Object Oriented CRONE Toolbox. Version Beta 1.
- CRONE Group, 2010c. CRONE Control Design Module User's Guide. Version 4.0.
- Dormido, S., Pisoni, E., Visioli, A., 2012. Interactive tools for designing fractional-order PID controllers. International Journal of Innovative Computing, Information and Control 8, 7(A), 4570–4590.
- Dugowson, S., 1994. Les différentielles métaphysiques: Histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation. Ph.D. thesis, University of Paris.
- Edwards, C., Spurgeon, S. K., 1998. Sliding Mode Control. Theory and Applications. Taylor & Francis Ltd.
- Horowitz, I., 1963. Synthesis of Feedback Systems. Academic Press.
- Horowitz, I., Sidi, M., 1972. Synthesis of feedback systems with large plant ignorance for prescribed time domain tolerances. International Journal of Control 16 (2), 287–309.
- HosseinNia, S. H., Sierociuk, D., Calderón, A. J., Vinagre, B. M., 2010. Augmented system approach for fractional order SMC of a DC-DC Buck converter. In: Proceedings of the 4th IFAC Workshop Fractional Differentiation and its Applications (FDA'10).
- HosseinNia, S. H., Tejado, I., Vinagre, B. M., 2013. Fractional-order reset control: Application to a servomotor. Mechatronics 23 (7), 781–788.
- Li, Z., 2015. Fractional order root locus.  
URL: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/50458-fractional-order-root-locus>
- Li, Z., Liu, L., Dehghan, S., Chen, Y. Q., Xue, D., 2016. A review and evaluation of numerical tools for fractional calculus and fractional order controls. International Journal of Control. DOI:10.1080/00207179.2015.1124290.

- Manabe, S., 1961. The non-integer integral and its application to control systems. *Japanese Institute of Electrical Engineers Journal* 6 (3-4), 83–87.
- Miller, K., Ross, B., 1993. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley and Sons, New York.
- Monje, C. A., Chen, Y. Q., Vinagre, B. M., Xue, D., Feliu, V., 2010. *Fractional-order Systems and Controls. Fundamentals and Applications*. Springer.
- Monje, C. A., Vinagre, B. M., Feliu, V., Chen, Y. Q., 2008. Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications. *Control Engineering Practice* 16 (7), 798–812.
- Oldham, K., Spanier, J., 2006. *The Fractional Calculus. Theory and Applications of Differentiation and Integration of Arbitrary Order*. Dover, New York.
- Opdycke, R. R., 1967. *An Investigation of the Strait servo*. Master Thesis, Kansas State University, Kansas, USA.
- Oustaloup, A., 1991. *La Commade CRONE: Commande Robuste d'Ordre Non Entier*. Hermes, Paris.
- Petrás, I., 2011a. Discrete fractional-order PID controller. URL: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/33761-discrete-fractional-order-pid-controller>
- Petrás, I., 2011b. Engineering Education and Research Using MATLAB. InTech, Ch. Fractional Derivatives, Fractional Integrals, and Fractional Differential Equations in Matlab, pp. 239–264.
- Petrás, I., 2015. Non-linear fractional-order PID controller. URL: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/51190-non-linear-fractional-order-pid-controller>
- Podlubny, I., 1999a. Fractional Differential Equations. Vol. 198 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, San Diego.
- Podlubny, I., 1999b. Fractional order systems and PI-lambda-D-mu controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control* 44 (1), 208–214.
- Podlubny, I., Petrás, I., Vinagre, B. M., O'Leary, P., Dorcák, L., 2002. Analogue realizations of fractional-order controllers. *Nonlinear Dynamics* 29, 281–296.
- Rao, V. G., Bernstein, D. S., 2001. Naive control of the double integrator. *IEEE Control Systems Magazine* October, 86–97.
- Sierociuk, D., 2003. Fractional states-space toolkit (FSST). URL: <http://www.ee.pw.edu.pl/dsieroci/fsst/fsst.htm>
- Stein, G., Athans, M., 1987. The LQR/LTR procedure for multivariable feedback control design. *IEEE Transactions on Automatic Control* 32, 105–114.
- Tenreiro Machado, J. A., 2011. Communications in nonlinear science and numerical simulation. Root locus of fractional linear systems 16 (10), 3855–3862.
- Tepljakov, A., 2015. FOMCON toolbox reference manual. URL: <http://docs.fomcon.net/>
- Tepljakov, A., 2016. FOMCON: Fractional-order modeling and control. (Fecha de consulta: 21/03/16). URL: <http://fomcon.net/>
- Tejado, I., HosseinNia, S. H., Vinagre, B. M., 2014. Adaptive gain-order fractional control for network-based applications. *Fractional Calculus and Applied Analysis* 17 (2), 462–482.
- Tricaud, C., 2008. Solution of fractional optimal control problems. URL: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/22196-solution-of-fractional-optimal-control-problems>
- Tustin, A., Allanson, J. T., Layton, J. M., Jakeways, R. J., 1958. The design of systems for automatic control of the position of massive objects. *The Proceedings of the Institution of Electrical Engineers* 105.
- Valério, D., 2005a. Ninteger: Fractional control toolbox for MatLab. URL: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8312-ninteger>
- Valério, D., 2005b. Ninteger: Fractional control toolbox for MatLab. URL: <http://web.ist.utl.pt/duarte.valerio/ninteger/ninteger.htm>
- Valério, D., 2005c. Ninteger v. 2.3 – fractional control toolbox for MatLab. URL: <http://web.ist.utl.pt/duarte.valerio/ninteger/Manual.pdf>
- Vilanova, R., Visioli, A., (Eds.), 2012. *PID Control in the Third Millennium*. Springer, London.
- Vinagre, B. M., Monje, C. A., 2006. *Introducción al control fraccionario*.

Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 3 (3), 5–23.

## Apéndice A. Breve noticia bibliométrica

Este apéndice da una breve noticia bibliométrica sobre la presencia del control fraccionario en las principales bases de datos. Realizada una búsqueda básica de los términos “fractional control” OR “fractional order control” OR “fractional controller” OR “fractional order controller” en las bases de datos de la Web of Science (WoS) y Scopus, la Tabla A.3 resume los resultados (bases consultadas el día 5 de abril de 2016).

Tabla A.3: Datos bibliométricos sobre la presencia del control fraccionario en la Web of Science (WoS) y Scopus. (Porcentajes respecto al número total de artículos en cada una de las bases)

		WoS	Scopus
Nº artículos		481	917
Nº citas		5121 (4026 sin autocitas)	9391 (6598 sin autocitas)
Índice h		34	45
Tipos de documentos	Revistas: Congresos: Otros:	57,80 41,37 0,83	48,64 45,26 6,10
Nº patentes:		10	14
Artículos más citados	1º) 2º) 3º)	(Podlubny, 1999b) (Monje et al., 2008) (Podlubny et al., 2002)	
Publicaciones por áreas	1º) 2º) 3º) 4º) 5º)	Ingeniería: 59,25 Control: 38,08 Informática: 21,00 Matemáticas: 17,67 Mecánica: 11,23	Ingeniería: 76,77 Informática: 37,40 Matemáticas: 26,61 Física: 8,07 Energía: 5,12
Publicaciones por países	1º) 2º) 3º) 4º) 5º) 6º)	China: 23,91 India: 11,23 Irán: 9,77 Portugal: 9,35 EEUU: 8,73 España: 8,32	China: 25,41 India: 12,10 EEUU: 10,03 Portugal: 8,07 Irán: 7,85 España: 7,74
Publicaciones por año	1º) 2º) 3º)	Año 2013: 17,05 Año 2014: 13,93 Año 2008: 8,52	Año 2014: 16,03 Año 2013: 14,94 Año 2015: 13,19